Chapitre 6

Suites numériques

I. Généralités

1. Définitions

a. Suites numériques

Définition 6.1

Une **suite** est une application u définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie I de $\mathbb{N}$ de la forme $I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$). Pour tout entier n on note $u_n = u(n)$. Une **suite numérique** est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

- u_n désigne le **terme de rang** n (ou **terme d'indice** n) de la suite.
- Pour désigner la suite u on écrit u, ou (u_n), ou encore $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou $(u_n)_{n\geq n_0}$ le cas échéant).

Remarque

Une suite peut être définie de plusieurs façons, voici une liste non-exhaustive d'exemples :

- de façon explicite

  Exemple : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1+3n}{\mathrm{e}^n}$

- par son (ou ses) premier(s) terme(s) et une relation de récurrence :

  Exemple : $u_1 = 3$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = 3u_n - 2$

  Exemple : $u_0 = 1,\quad u_1 = 1$ et $\forall n \geq 1, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

  Exemple : $u_0 = 1$, et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$

- de façon implicite, comme solution d'une équation qui dépend de n

  Exemple : si $(E_n) : x^n + \ln(x) = 0$, on peut montrer en étudiant pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : x \longmapsto x^n + \ln(x)$ que (E_n) admet une unique solution sur $]0;+\infty[$. Si on note u_n cette solution pour chaque entier n, cela définit une suite u_n.

b. Suites minorée, majorée, bornée

Définition 6.2

Soit (u_n) une suite numérique définie sur $I \subset \mathbb{N}$. On dit que (u_n) est...

- ...**majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in I$, $u_n \leq M$;
- ...**minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in I$, $m \leq u_n$;
- ...**bornée** s'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in I$, $m \leq u_n \leq M$.

2. Variations

Définition 6.3

Soit (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$. On dit que (u_n) est...

- ...**croissante** si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$, autrement dit si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$;
- ...**décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$, autrement dit si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$;
- ...**constante** si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

Remarque

Dans le cas bien précis où (u_n) est définie de façon explicite par $u_n = f(n)$ où f est une fonction, alors si f est monotone sur $[0; +\infty[$, u_n est monotone et de même sens de variation sur $[0; +\infty[$.
En effet, on a alors $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n)$ et le signe de $f(n+1) - f(n)$ est constant si f est monotone.

Attention, il ne faut pas confondre ce cas avec celui d'une suite définie par récurrence : par exemple si $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{1}{2}x$. La fonction f est croissante mais la suite (u_n) est décroissante!

→ **Exercice de cours n°1.**

II. Cas particuliers

1. Suites arithmétiques

Définition 6.4

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** s'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. On appelle alors **raison** de la suite (u_n) ce réel r.

Propriété 6.1

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r

- Si $r > 0$, (u_n) est croissante
- Si $r < 0$, (u_n) est décroissante
- Si $r = 0$, (u_n) est constante

Propriété 6.2 (Terme général d'une suite arithmétique)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. Alors

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$
- $\forall n, p \in \mathbb{N}, n \geq p, u_n = u_p + (n-p)r$

2. Suites géométriques

Définition 6.5

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** s'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$. On appelle alors **raison** de la suite (u_n) ce réel q.

Propriété 6.3

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 > 0$

- Si $q > 1$, (u_n) est croissante
- Si $0 < q < 1$, (u_n) est décroissante
- Si $q = 1$, (u_n) est constante
- Si $q \leq 0$, (u_n) n'est pas monotone.

Remarque

Si (u_n) est une suite géométrique avec $u_0 < 0$ et $q > 0$, alors la propriété précédente reste vraie en échangeant « croissante » et « décroissante ».

Propriété 6.4 (Terme général d'une suite géométrique)

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. Alors

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$
- $\forall n, p \in \mathbb{N}, n \geq p, u_n = u_p \times q^{n-p}$

→ **Exercice de cours n°2.**

→ **Exercice de cours n°3.**

3. Suites arithmético-géométriques

Définition 6.6

Une suite numérique (u_n) est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels a et b avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Proposition 6.5

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$. En posant $r = \dfrac{b}{1-a}$, la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - r$ est une suite géométrique de raison a.

Ainsi l'étude d'une suite arithmético-géométrique peut se ramener à l'étude d'une suite géométrique auxiliaire. On en déduit immédiatement la propriété suivante :

Propriété 6.6 (Terme général d'une suite arithmético-géométrique)

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ et soit $r = \dfrac{b}{1-a}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n(u_0 - r) + r$$

4. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 6.7

Une suite (u_n) est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Si u_0 et u_1 sont donnés, une telle suite (u_n) est définie de façon unique.

Proposition 6.7 (Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2)

Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par la relation $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On appelle **équation caractéristique** de (u_n) l'équation $r^2 = ar + b$. On distingue trois cas :

- Si (E) admet deux solution réelles distinctes r_1 et r_2, alors il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

- Si (E) admet une solution double r_0, alors il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n$$

- L'équation caractéristique n'admet aucune solution réelle. Elle admet donc deux solutions complexes conjuguées, $z_1 = r\,\mathrm{e}^{\imath\alpha}$ et $z_2 = r\,\mathrm{e}^{-\imath\alpha}$ (voir chapitre 9). Il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n \cos(n\alpha) + \mu r^n \sin(n\alpha)$$

Remarque

En pratique, dans chaque cas, on trouve la valeur de λ et μ à l'aide des valeurs des deux premiers termes de la suite (u_n).

→ **Exercice de cours n° 4.**

III. Limites

Dans la suite de ce chapitre, on note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Cette notation est réservé au cours et servira seulement à gagner du temps en regroupant plusieurs cas en un seul.

1. Généralités

a. Limite infinie, limite finie

Définition 6.8 (limite infinie)

Soit (u_n) une suite numérique. On dit que...

- ...$\boldsymbol{(u_n)}$ **tend vers** $+\infty$, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Autrement dit, (u_n) a pour limite $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n > A$$

.

- ...$\boldsymbol{(u_n)}$ **tend vers** $-\infty$, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, si tout intervalle de la forme $]-\infty;A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Autrement dit, (u_n) a pour limite $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n < A$$

.

→ **Exercice de cours n°5.**

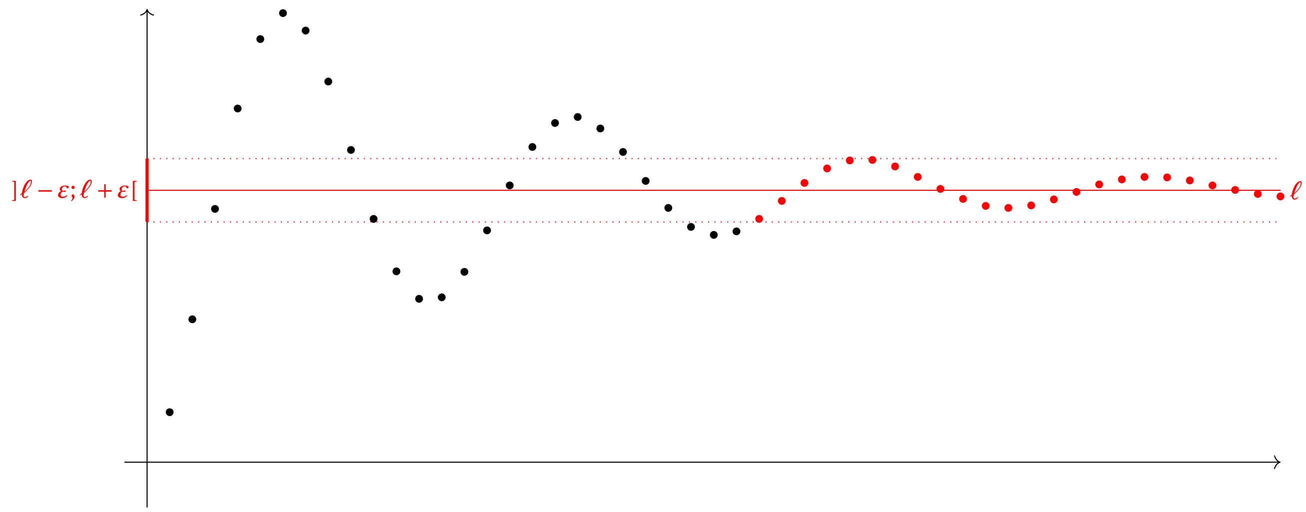
Définition 6.9 (limite finie)

Soit (u_n) une suite numérique et soit ℓ un nombre réel. On dit que $\boldsymbol{(u_n)}$ **admet pour limite** $\boldsymbol{\ell}$, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Une formulation équivalente est :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$$

.
Une autre formulation est

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$



À partir d'un certain rang les termes de la suite ne sortent plus de l'intervalle $]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$
et ce **quel que soit la valeur de** ε

Remarque

La notion de **voisinage** vue dans le chapitre précédent permet d'unifier les deux définitions précédentes : si $\ell \in \overline{R}$, on dit que (u_n) tend vers ℓ si tout voisinage de ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Remarque

Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on note aussi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Définition 6.10

- Si (u_n) admet une limite finie, on dit que (u_n) converge.
- Si (u_n) admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$, ou si (u_n) n'admet pas de limite on dit que (u_n) diverge.

Exemples 6.1

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge
- $(-1)^n$ vaut alternativement -1 et 1, montrons qu'elle ne converge pas. Supposons qu'il existe un réel ℓ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, tous les termes de la suite sont contenus dans $]\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon[$ à partir d'un certain rang.
  - ▷ Si $\ell \neq -1$ et $\ell \neq 1$, alors il suffit de choisir ε tel que $]\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon[$ ne contienne ni 1 ni -1 (en prenant par exemple $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\min(|\ell-1|,|\ell+1|)$). Alors, aucun terme de la suite n'appartient à $]\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon[$.
  - ▷ Si $\ell = 1$, on prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Aucun terme impair de la suite n'appartient à $\left]1-\frac{1}{2};1+\frac{1}{2}\right[$, cet intervalle ne peut donc pas contenir tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang, donc (u_n) ne converge pas vers 1.
  - ▷ Si $\ell = -1$, on prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Aucun terme pair de la suite n'appartient à $\left]-1-\frac{1}{2};-1+\frac{1}{2}\right[$, cet intervalle ne peut donc pas contenir tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang, donc (u_n) ne converge pas vers -1.

  On a donc montré que $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$ par propriété de la fonction exponentielle donc $(\mathrm{e}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

b. Unicité de la limite

Proposition 6.8

La limite d'une suite est unique. Si $(\ell,\ell') \in (\overline{\mathbb{R}})^2$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell'$, alors $\ell = \ell'$.

c. Caractérisations de la limite

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0$$

Ainsi, l'étude d'une limite finie peut toujours se ramener à l'étude d'une limite nulle.

Il est parfois plus pratique de manipuler des termes positifs uniquement. À cet effet, la proposition suivante peut rendre service :

Proposition 6.9

Soit (u_n) une suite numérique et ℓ un réel

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$

d. Quelques critères de convergence

Proposition 6.10

Soit (u_n) une suite convergente. Alors (u_n) est bornée.

Remarque

Le fait d'être bornée est une condition **nécessaire** mais **non suffisante** de convergence. Par exemple la suite définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée mais diverge.

Une **suite extraite** d'une suite (u_n) est une suite dont les termes sont certains termes de la suite (u_n) pris dans le même ordre, c'est à dire une suite v définie par $v_n = u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Cette définition générale n'est pas à connaître mais les exemples utilisés ci-dessous doivent être connus :

Proposition 6.11

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute **suite extraite** de (u_n) converge vers ℓ. En particulier :

- $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$
- $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell$
- $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$.

Une forme de réciproque est vraie pour le cas particulier suivant :

Proposition 6.12 (admise)

Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell \\ \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell \end{cases}$

Exemple 6.2

On peut déduire de cette proposition que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite finie ou infinie. En effet, $\lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} -1 = -1$, si (u_n) avait une limite cela contredirait la proposition.

Proposition 6.13

Soit (u_n) une suite bornée et v_n une suite qui tend vers 0. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$.

Proposition 6.14

Soit (v_n) une suite qui ne s'annule pas telle que $\lim_{n\to+\infty} |v_n| = +\infty$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n} = 0$

Proposition 6.15

Soit (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite qui ne s'annule pas telle que $\lim_{n\to+\infty} |v_n| = +\infty$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$

2. Limites de référence

Lemme 6.16

Soit a un réel strictement positif. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

On déduit de ce lemme la proposition suivante :

Proposition 6.17

Soit q un nombre réel.

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $|q| < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q < -1$, alors q^n n'a pas de limite.

Proposition 6.18

- $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$
- $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$

Proposition 6.19

Pour tout $\alpha > 0$, on a

- $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

IV. Calculs de limites

1. Opérations sur les limites

Proposition 6.20 (Multiplication par un réel)

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $a > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a \times u_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $a < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a \times u_n = -\infty$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $a > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a \times u_n = -\infty$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $a < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a \times u_n = +\infty$

Proposition 6.21 (Autres opérations)

Dans ces tableaux, ℓ et ℓ' désignent des nombres réels.

Somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$	$\ell\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Inverse

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	0_+	0_-	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	0_+ ou 0_-	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	FI	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI

Exemple 6.3

- $\lim\limits_{n\to+\infty} (3n^2 + 2n) = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (3 + \dfrac{2}{n}) = 3$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$

Exemple 6.4

Deux exemples de formes indéterminées :
$u_n = 2n^2$ et $v_n = -4n^2$, alors $u_n + v_n = -2n^2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty$
$u_n = 5n$ et $v_n = -2n$, alors $u_n + v_n = 3n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

Remarque

« Forme indéterminée » ne veut pas forcément dire qu'il n'y a pas de limite, dans certains cas la limite peut être déterminée par un raisonnement plus approfondi.

Exemple 6.5

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2+n}{3n+5}$.
Par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n+5) = +\infty$. C'est donc une forme indéterminée.
Pour lever l'indétermination, on factorise par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur :

$$u_n = \frac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(3+\dfrac{5}{n}\right)} = \frac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{3+\dfrac{5}{n}}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5}{n} = 0$, donc par somme, quotient et produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque

La notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^-$) signifie $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang (resp. $u_n < 0$ à partir d'un certain rang). Par exemple $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2} = 0^+$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = 0^-$.
On n'utilise ces notations que lorsqu'elles sont pertinentes, c'est à dire dans un calcul intermédiaire pour lever une indéterminée de signe.

Proposition 6.22 (passage à la limité dans une inégalité ou une égalité)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes, et soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$.

- Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si à partir d'un certain rang $u_n = v_n$, alors $\ell = \ell'$.

2. Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Une suite définie par une relation de récurrence peut être de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une certaine fonction. Toutes les propositions énoncés dans cette sections sont à savoir redémontrer dans chaque cas particulier.
Pour savoir si u est bien définie, il faut faire attention à l'ensemble de définition de f.

→ Exercice de cours n°6.

Définition 6.11

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que I est **stable par** f si pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.

Proposition 6.23

Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que I est stable par f. Alors, toute suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

Proposition 6.24

Si (u_n) est une suite qui converge vers un réel ℓ et que f est une fonction **continue en ℓ**, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

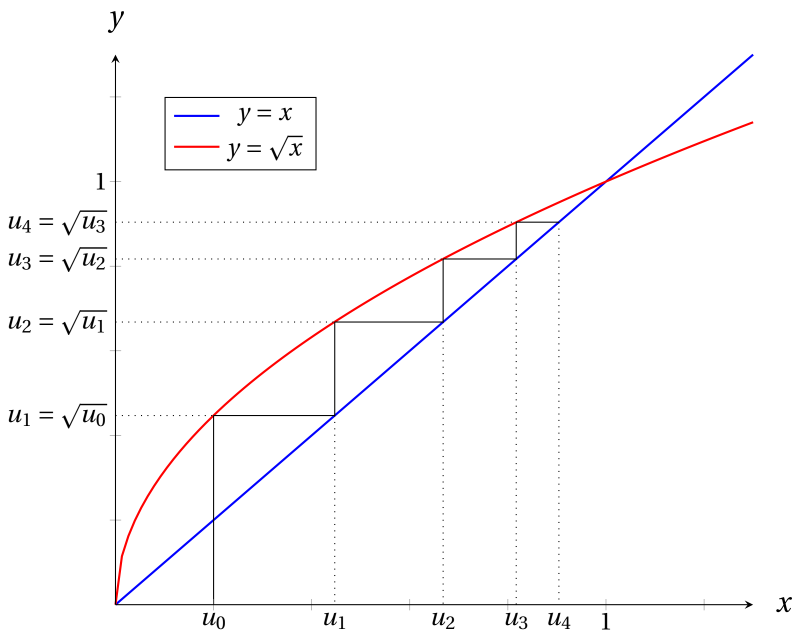
→ Exercice de cours n°7.

Remarque

Dans l'exemple précédent, ℓ vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$. On dit que ℓ est un **point fixe** de f. Si f est une fonction continue, une suite convergente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ admet pour limite un point fixe de f.

Si f est une fonction continue et sans points fixe, alors (u_n) diverge. Cela peut servir à prouver qu'une suite croissante tend vers $+\infty$ de façon indirecte (voir exercice n°15 du TD par exemple)

On peut déterminer graphiquement les termes d'une suite définie par une relation de récurrence en représentant la courbe $y = f(x)$ et la droite $y = x$. Dans l'exemple ci-dessous, on considère la suite définie par $u_0 = 0{,}2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$



V. Théorèmes de convergence

1. Suites monotones

Théorème 6.25 (de la limite monotone)

Soit (u_n) une suite numérique.

- Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) converge.
- Si (u_n) est croissante et non majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge.
- Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Si (u_n) est croissante et majorée, la limite de (u_n) n'est pas nécessairement égale au majorant. Elle est par contre égale à la borne supérieure de (u_n) (qui existe bien d'après la propriété de la borne supérieure car (u_n) est majorée).

Proposition 6.26 (admise)

Si (u_n) est croissante et majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Si (u_n) est décroissante et minorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$

Remarque

Ce théorème est parfois appelé à tort « théorème de convergence monotone » par confusion avec un autre théorème qui porte ce nom.

Proposition 6.27 (suites monotones convergentes)

- Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers un réel ℓ. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$.
- Soit (v_n) une suite décroissante qui converge vers un réel ℓ'. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq \ell'$.

2. Théorèmes de comparaison

Théorème 6.28 de comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

→ **Exercice de cours n° 8.**

Théorème 6.29 (des gendarmes/d'encadrement)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang. Si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite finie ℓ, alors (v_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

→ **Exercice de cours n° 9.**

→ **Exercice de cours n° 10.**

3. Suites adjacentes

Définition 6.12

Deux suites (a_n) et (b_n) sont dites **adjacentes** si les trois conditions suivantes sont remplies :

- (a_n) est croissante
- (b_n) est décroissante
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$

Proposition 6.30

Si (a_n) et (b_n) sont adjacentes avec (a_n) croissante et (b_n) décroissante, alors (a_n) et (b_n) convergent toutes deux vers un même réel ℓ. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq \ell \leq b_n$$

→ **Exercice de cours n° 11.**

→ **Exercice de cours n° 12.**

VI. Comparaison asymptotique

Les calculs de limites sous forme indéterminée reposent sur des croissances comparées de suites. De façon informelle, on dit que certaines suites tendent vers $+\infty$ (ou vers 0) « plus rapidement » que d'autres et on factorise par ces termes pour levers les indéterminations. Les notions définies dans cette section permettent de formaliser ces comparaison entre suites et de dégager des règles générales de calcul.

1. Négligeabilité

Définition 6.13 (Négligeabilité)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que $\boldsymbol{(u_n)}$ **est négligeable devant** $\boldsymbol{(v_n)}$ s'il existe une suite (ε_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \varepsilon_n v_n$ vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. On note alors $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$ (notation de Landau). Si (v_n) ne s'annule pas, on a :

$$u_n = o(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

→ **Exercice de cours n° 13.**

Propriété 6.31

Soient (a_n), (b_n) et (c_n) sont trois suites.

- Si $a_n = o(b_n)$ et $b_n = o(c_n)$, alors $a_n = o(c_n)$.
- Si $a_n = o(c_n)$ et $b_n = o(c_n)$, alors $a_n + b_n = o(c_n)$

Propriété 6.32 (Compatibilité avec le produit)

Si $a_n = o(b_n)$, alors quelle que soit la suite (c_n) on a $a_n c_n = o(b_n c_n)$.

Propriété 6.33

Soit (u_n) une suite. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ si et seulement si $u_n = o(1)$.

Proposition 6.34 (Croissance comparée de suites usuelles, admise)

Soient $a > 1$ et $b, c > 0$ trois réels. Les trois suites $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n^b)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\ln(n)^c)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$ et vérifient les relations de négligeabilité suivantes :

Limite	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)^c}{n^b} = 0$
Notation de Landau	$a^n = o(n!)$	$n^b = o(a^n)$	$\ln(n)^c = o(n^b)$

en particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$.

→ **Exercice de cours n° 14.**

2. Équivalence

Définition 6.14 (Équivalence de suites)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est **équivalente à** (v_n) s'il existe une suite (α_n) telle que $u_n = \alpha_n v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$. On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Si (v_n) ne s'annule pas on a :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Exemples 6.6

- $n^3 + n = n^3 \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$ donc $n^3 + n \sim n^3$
- $\ln(n) + e^n - \sqrt{n} = e^n \underbrace{\left(1 + \frac{\ln(n)}{e^n} - \frac{\sqrt{n}}{e^n}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$ donc $\ln(n) + e^n - \sqrt{n} \sim e^n$
- $\frac{1}{n^2} + e^{-n} = \frac{1}{n^2} \underbrace{\left(1 + n^2 e^{-n}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$ donc $\frac{1}{n^2} + e^{-n} \sim \frac{1}{n^2}$

Propriété 6.35

Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites.

- Si $(a_n) \sim (b_n)$, alors $(b_n) \sim (a_n)$
- Si $(a_n) \sim (b_n)$ et que $(b_n) \sim (c_n)$ alors $(a_n) \sim (c_n)$

Propriété 6.36 (Équivalents et limites)

- Soit ℓ un réel **non nul**. Alors :
$$u_n \sim \ell \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$
- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $u_n \sim v_n$, alors (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge et elles ont la même limite (éventuellement infinie) le cas échéant.

Attention, il ne suffit pas que deux suites aient la même limites pour qu'elle soient équivalentes. Par exemple $u_n = n$ et $v_n = n^2$ vérifient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, mais

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $u_n \not\sim v_n$.

Propriété 6.37

On a $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$ si et seulement si $u_n = v_n + o(v_n)$.

→ **Exercice de cours n° 15.**

Proposition 6.38 (Opérations sur les équivalences)

Soient (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) quatre suites telles que $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$. Alors

- $a_n c_n \sim b_n d_n$
- $\dfrac{a_n}{c_n} \sim \dfrac{b_n}{d_n}$ (sous réserve que (c_n) et (d_n) ne s'annulent pas)

Remarque

En règle général, on ne peut pas additionner des équivalences.
Par exemple, $n^2 + 1 \sim n^2$ et $-n^2 \sim -n^2$ mais $n^2 + 1 - n^2 \not\sim n^2 + (-n^2)$.

→ **Exercice de cours n° 16.**

Proposition 6.39 (Puissance réelle d'un équivalent)

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites strictement positives telles que $u_n \sim v_n$ et si $a \in \mathbb{R}$, alors $u_n^a \sim v_n^a$. En particulier, $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$.

Remarque

En général, on ne peut pas composer des équivalent par n'importe quelle fonction. Par exemple, $n+1 \sim n$ mais $\mathrm{e}^{n+1} \not\sim \mathrm{e}^n$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^n} = \mathrm{e} \neq 1$.

Proposition 6.40

Soit $(P(n))$ une suite où P est un polynôme. Alors $P(n)$ est équivalent à son terme de plus haut degré et $P(1/n)$ est équivalent au terme de plus petit degré non nul.

→ **Exercice de cours n° 17.**

Proposition 6.41 (Équivalents usuels)

Si (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Alors

- $\boxed{\sin(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n}$ ou de façon équivalente $\boxed{\sin(u_n) \underset{n\to\infty}{=} u_n + o(u_n)}$
- $\boxed{\cos(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} 1}$ ou de façon équivalente $\boxed{\cos(u_n) \underset{n\to\infty}{=} 1 + o(u_n)}$
- $\boxed{\dfrac{1}{1-u_n} - 1 \sim u_n}$ ou de façon équivalente $\boxed{\dfrac{1}{1-u_n} = 1 + u_n + o(u_n)}$
- $\boxed{\ln(1+u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n}$ ou de façon équivalente $\boxed{\ln(1+u_n) \underset{n\to\infty}{=} u_n + o(u_n)}$
- $\boxed{\mathrm{e}^{u_n} - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} u_n}$ ou de façon équivalente $\boxed{\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to\infty}{=} 1 + u_n + o(u_n)}$

→ **Exercice de cours n° 18.**

→ **Exercice de cours n° 19.**

Exercices de cours

Exercice 1

Étudier les variations de la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{n^2+4}{n+1}$.

Exercice 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 5.
Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3\sqrt{7^n}}{2^{2n}}$. Montrer que u_n est géométrique et préciser sa raison.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Déterminer une expression du terme général de (u_n).

Exercice 5

Montrer à l'aide de la définition que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n+3}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 6

Considérons la suite u définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1}$. Cette suite est-elle bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+1}{u_n+1}$.

1. Étudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$ sur son ensemble de définition.
2. En déduire que l'intervalle $[1;2]$ est stable par f
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$
4. En déduire que u_n converge et préciser sa limite.

Exercice 8

Étudier la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \exp\left(\dfrac{\sqrt{n} \times \sin(n) - \sqrt{n}}{n \tan\left(\frac{1}{n}\right) + \sqrt{n}}\right) + n^2$.

Exercice 9

Étudier la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{\sin(3n)}{n}$.

Exercice 10

Étudier la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2 - n\sin n}{7 - 3n^2}$.

Exercice 11

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \dfrac{5u_n+2v_n}{7} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 &= 3 \\ v_{n+1} &= \dfrac{2u_n+5v_n}{7} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$
2. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. Soit (a_n) et (b_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$.
Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes et en déduire que (u_n) converge.

Exercice 13

Montrer que si $0 < a < b$ on a $n^a = o(n^b)$ et $a^n = o(b^n)$

Exercice 14

Déterminer les limite de $u_n = \dfrac{(\ln n)^{2023}}{\sqrt{n}}$ et de $v_n = \dfrac{n^{10} \times \ln(n)^{100}}{1000^n}$

Exercice 15

Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

a) $u_n = \mathrm{e}^{-n} + \sqrt{n} + \ln(n)$ b) $v_n = \sqrt{n^4 + n^2}$ c) $w_n = \ln(n+3) - \ln(n^2+1)$

Exercice 16

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{3/2}\left(\dfrac{1}{n - \ln(n)} - \dfrac{1}{n}\right) = 0$.

Exercice 17

Calculer la limite de $u_n = \dfrac{7n^5 - 4n^3 + 2n^2 - 1}{3 + 2n^2 - 11n^5}$ et celle de $v_n = \dfrac{\frac{6}{n^3} - \frac{2}{n^4} + \frac{6}{n^7}}{\frac{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}}{-2+6n+3n^2}}$

Exercice 18

Montrer que pour tout réel x, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$.

Exercice 19

Étudier dans chaque cas la limite de la suite (u_n)

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3n+2}{n^2+5n+1}$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2(\mathrm{e}^{1/n} - \mathrm{e}^{1/(n+1)})$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\sin(\pi/n))}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} - 1}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n(\ln(1+n) - \ln n)$
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^{1/n}$
6. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (3n)^{1/\sqrt{n}}$